

# *Notations*

- Tous les espaces dans ce mémoire sont définis sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .  
La dérivée partielle  $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$  est notée  $\partial^\alpha f$ , si  $f$  une fonction de deux variable  $(x, y)$  on note  $\partial_x^\alpha f$  et  $\partial_y^\alpha f$  ou  $D^\alpha f$ .
- Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction, alors le support de  $f$  est  $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ .
- $f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$  est le produit du convolution des fonctions  $f$  et  $g$ .
- Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux espaces, on dit que  $A_1 \hookrightarrow A_2$  s'il existe  $c > 0$ , telle que:

$$\|\cdot\|_{A_2} \leq c \|\cdot\|_{A_1}.$$

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions mesurables, intégrables sur tout compact de  $\mathbb{R}^n$ .
- Pour  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) f(x) dx,$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) f(\xi) d\xi.$$

- $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $q'$  est l'exposant conjugué de  $q$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

- 
- Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a_+ = \max(a, 0)$ .

- $E'$  est l'espace dual de  $E$ .

- $L_p$  est l'espace des fonctions mesurables  $f$  telle que

$$\|f\|_{L_p} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- $\ell_p$  est l'espace des suites  $(x_n)_n$  telles que

$$\|x_n\|_{\ell_p} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $[x]$  est sa partie entière.

- Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $C_b^m(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions de classe  $C^m(\mathbb{R}^n)$  dont toutes les dérivées sont bornées et

$$\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

- Pour  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ ,  $C^s(\mathbb{R}^n)$  est l'espace de Hölder des fonction  $f \in C^{[s]}(\mathbb{R}^n)$  telle que:

$$\|f\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{C^{[s]}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x - y|^{s-[s]}} < +\infty.$$

- Soient  $0 < p \leq \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$ , alors  $\ell_q(L_p)$  est l'espace des suites  $\{f_k\}_k \subset S'(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\|\{f_k\}_k\|_{\ell_q(L_p)} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k(x)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

et  $L_p(\ell_q)$  est l'espace des suites  $\{f_k\}_k \subset S'(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\|\{f_k\}_k\|_{L_p(\ell_q)} = \left\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty.$$

- $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support compact.

- $D'(\mathbb{R}^n)$  est le dual de  $D(\mathbb{R}^n)$ , appelé espace des distributions sur  $\mathbb{R}^n$ .

- 
- $S(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à décroissances rapides.

- $S'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des distributions tempérées.

- $H_p^s$  est l'espace de Bessel telle que:

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| \mathcal{F}^{-1} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi)(x) \right\|_p \quad (s \in \mathbb{R}, f \in S'(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty).$$

- $W_p^m(\mathbb{R}^n)$  est l'espace de Sobolev telle que:

$$W_p^m = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha f \in L_p, \quad |\alpha| \leq m\} \quad (m \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty).$$

- Espace  $F$  : espace de Lizorkin-Triebel .

- Espace  $B$  : espace de Besov .

- $f \cdot g$  au lieu  $f(x) \cdot g(x)$ .

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Quelques résultats préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Série de Littlewood-Paley . . . . .	3
1.1.1 la décomposition de Littlewood-Paley . . . . .	3
1.1.2 Décomposition du produit $f.g$ . . . . .	5
1.2 Espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel . . . . .	6
1.2.1 Espace de Besov . . . . .	6
1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel . . . . .	7
1.2.3 Exemples des fonctions dans l'espace de Besov . . . . .	8
1.2.4 La multiplication dans une algèbre . . . . .	10
1.3 L'interpolation . . . . .	11
1.3.1 L'interpolation dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	11
1.3.2 L'interpolation dans $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$ . . . . .	12
1.3.3 L'interpolation réelle . . . . .	12
1.4 Inégalité principale . . . . .	13
<b>2 La multiplication ponctuelle du type <math>A \cdot A \hookrightarrow A</math> avec <math>A \equiv B</math> ou <math>A \equiv F</math></b>	<b>15</b>
2.1 Rappel . . . . .	15
2.2 Multiplication du type $F \cdot F \hookrightarrow F$ et $B \cdot B \hookrightarrow B$ . . . . .	17
<b>3 La multiplication ponctuelle du type <math>F.B \hookrightarrow F</math></b>	<b>25</b>
3.1 Rappel . . . . .	25
3.2 Multiplication du type $F \cdot B \hookrightarrow F$ . . . . .	27

<b>Conclusion</b>	<b>34</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# Introduction

Depuis longtemps les espaces de Sobolev  $H_p^s, W_p^m, \dots$  ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Les espaces de Lizorkin-Triebel  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  sont des espaces qui contiennent les Sobolev, puisqu'on dispose de l'égalité  $W_p^m = F_{m,2}^s$ . Ils contiennent aussi les espaces Potentiel de Bessel  $H_p^s$ , puisque la aussi on a  $H_p^s = F_{p,2}^s$ .

Certaines théories ont été étudiées dans les  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  comme par exemple, la résolution de certaines équations aux dérivées partielles avec des données dans  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , la continuité de certains opérateurs pseudo-différentiels sur  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , ... etc.

Dans ce mémoire, nous allons étudier la multiplication ponctuelle dans les espace de Besov et les espaces de Lizokin-Triebel, on a déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres  $(s, s_0, s_1), (p, p_0, p_1), (q, q_0, q_1)$  pour que l'inclusion du type

$$A_{p_0}^{s_0, q_0} \cdot A_{p_1}^{s_1, q_1} \hookrightarrow A_p^{s, q} \text{ avec } A_p^{s, q} \equiv B_p^{s, q} \text{ ou } A_p^{s, q} \equiv F_p^{s, q}$$

soit vérifiées. Cela fait suite au travail de D.Drihem et M.Moussai.

Notre activité est organisée en trois chapitres:

- Dans le premier chapitre, on rappelle quelques concepts et outils de base, en utilisant: Série de Littlewood-Paley, espace de Besov et de Lizokin-Triebel, quelques propositions et lemmes.
- Le deuxième chapitre est basé sur l'étude de la multiplication ponctuelle du type  $B \cdot B \hookrightarrow B$ ,  $F \cdot F \hookrightarrow F$  et dans l'espace de Besov et l'espace de Lizokin-Triebel pour  $r < \frac{n}{p_2}$ .
- Dans le dernier chapitre on a étudié la multiplication ponctuelle du type  $F \cdot B \hookrightarrow F$  dans l'espace de Besov et l'espace de Lizokin-Triebel pour  $r < \frac{n}{p_2}$  et que vous avez

besoin de concepts de base de chapitres précédents et aussi des définitions et des inégalités maximales.

# Chapitre 1

## Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on va rappeler les notions essentielles qu'on va utiliser par la suite à savoir particulier les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel, quelque propriétés principales et quelques exemples des fonctions dans les espaces de Besov.

### 1.1 Série de Littlewood-Paley

#### 1.1.1 la décomposition de Littlewood-Paley

Soit  $\gamma \in S(\mathbb{R}^n)$  telle que:

1.  $\text{supp} \gamma \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$ ,
2.  $\gamma(\xi) > 0$  pour  $2^{-1} < |\xi| < 2$ ,
3.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-k}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

On pose  $\varphi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma(2^{-k}\xi)$ , on obtient une fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , telle que:

$$\text{supp } \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\} \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi \leq 1.$$

Alors,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\varphi(\xi) + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma(2^{-k}\xi) = 1, \tag{1.1.1}$$

La relation (1.1.1) est appelé la partition de l'unité.



A cette décomposition on associe une suite d'opérateurs de convolutions

$$Q_j : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\Delta_k : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

telle que

$$\begin{aligned} (Q_j f)(x) &= (\mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j} \cdot)) * f)(x), \\ &= 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1} \varphi(2^j(x-y)) f(y) dy, \quad (j = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad 1.1.2$$

et

$$\begin{aligned} (\Delta_k f)(x) &= (\mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-k} \cdot)) * f)(x), \\ &= 2^{kn} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^k(x-y)) f(y) dy, \quad (k = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Avec la notation  $\Delta_0 = Q_0$  alors

$$\widehat{Q_j f}(\xi) = \varphi(2^{-j} \cdot) \widehat{f}(\xi) \quad (\text{pour } j \geq 1) \quad \text{et} \quad \widehat{\Delta_k f}(\xi) = \gamma(2^{-k} \cdot) \widehat{f}(\xi) \quad (\text{pour } k \geq 0).$$

Ecrivons la relation (1.1.1) au point  $2^{-j}\xi$ , alors

$$\varphi(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi) = 1.$$

En multipliant par  $\widehat{f}$ , on obtient

$$\varphi(2^{-j}\xi) \widehat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi) \widehat{f} = \widehat{f}. \quad (1.1.4)$$

En appliquant l'application  $\mathcal{F}^{-1}$  sur (1.1.4), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = f, \quad (\forall j \in \mathbb{N}). \quad (1.1.5)$$

Pour  $j = 0$ , on trouve

$$\varphi(\xi) \widehat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi) \widehat{f} = \widehat{f},$$

i.e.

$$Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k f = f, \quad (1.1.6)$$

alors

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k f. \quad (1.1.7)$$

On remplaçant  $f$  dans (1.1.5), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f.$$

Donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f.$$

La relation (1.1.7) est la décomposition de  $f$  du type de Littlewood-Paley.

### 1.1.2 Décomposition du produit $f.g$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ . On définit le produit  $f.g$  par:

$$f.g = \lim_{j \rightarrow \infty} (Q_j f) \cdot (Q_j g),$$

lorsque la limite existe dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ . Le support de  $\Delta_\ell f \cdot \Delta_k g$  est non vide dans le cas

$\ell - 1 \leq k \leq \ell + 1$ , donc

$$\begin{aligned} f.g &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_\ell g \cdot \left( \sum_{k=0}^{\ell-2} + \sum_{k=\ell-1}^{\ell+1} + \sum_{k=\ell+2}^{\infty} \right) \Delta_k f, \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k-2} \Delta_\ell f \cdot \Delta_k g + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=k-1}^{k+1} \Delta_\ell f \cdot \Delta_k g + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell-2} \Delta_\ell f \cdot \Delta_k g, \\ &= \pi_1(f, g) + \pi_2(f, g) + \pi_3(f, g). \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \text{supp } \mathcal{F}(Q_{k-2} f \cdot \Delta_k g) &\subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n / 2^{k-3} \leq |\xi| \leq 2^{k+1} \}, \quad k = 2, 3, \dots \\ \text{supp } \mathcal{F} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=k-1}^{k+1} \Delta_\ell f \cdot \Delta_k g \right) &\subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n / |\xi| \leq 5.2^k \}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} f.g &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k (f.g), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \left( \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f \sum_{\ell=0}^{\infty} \Delta_\ell g \right), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Delta_k (\Delta_j f \cdot \Delta_\ell g). \end{aligned}$$

Calculons maintenant  $\mathcal{F}(\Delta_k(\Delta_j f \cdot \Delta_\ell g))$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\Delta_k(\Delta_j f \cdot \Delta_\ell g))(\xi) &= \gamma(2^{-k}\xi) [\mathcal{F}(\Delta_j f \cdot \Delta_\ell g)](\xi), \\
 &= \gamma(2^{-k}\xi) (\mathcal{F}(\Delta_j f) * \mathcal{F}(\Delta_\ell g))(\xi), \\
 &= \gamma(2^{-k}\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\Delta_j f)(\xi - \eta) \mathcal{F}(\Delta_\ell g)(\eta) d\eta, \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(2^{-k}\xi) \gamma(2^{-j}(\xi - \eta)) \gamma(2^{-l}\eta) \mathcal{F}(f)(\xi - \eta) \mathcal{F}(g)(\eta) d\eta.
 \end{aligned}$$

Donc, il ya trois cas où le support de  $\mathcal{F}(\Delta_k(\Delta_j f \cdot \Delta_\ell g))$  n'est pas vide:

$$\begin{aligned}
 \ell &\leq k+1 \quad \text{et} \quad k-2 \leq j \leq k+4, \\
 j &\leq k+1 \quad \text{et} \quad k-2 \leq \ell \leq k+4, \\
 \ell, j &\geq k \quad \text{et} \quad |\ell - k| < 1.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\Delta_k(f \cdot g) = \sum_{j, \ell=0}^{\infty} \Delta_k(\Delta_j f \cdot \Delta_\ell g) = (\Delta_{k(1)} + \Delta_{k(2)} + \Delta_{k(3)})(f \cdot g), \quad (1.1.8)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Delta_{k(1)}(f \cdot g) &= \Delta_k(\widetilde{\Delta}_k f \cdot Q_{k+1} g), \\
 \Delta_{k(2)}(f \cdot g) &= \Delta_k(Q_{k+1} f \cdot \widetilde{\Delta}_k g), \\
 \Delta_{k(3)}(f \cdot g) &= \sum_{j=k}^{\infty} \Delta_k(\Delta_j f \cdot \overline{\Delta}_j g),
 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

telle que

$$\widetilde{\Delta}_k = \sum_{j=k-2}^{k+4} \Delta_j \quad \text{et} \quad \overline{\Delta}_k = \sum_{j=k-1}^{k+1} \Delta_j.$$

## 1.2 Espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

### 1.2.1 Espace de Besov

**Définition 1.2.1 (L'espace  $\ell_q^s(L_p)$ )** Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 < p, q \leq \infty$ ,  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S'$  et  $\text{supp } \widehat{f_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < c2^j\}$ , alors

$$\left\| \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell_q^s(L_p)} = \left\| \{2^{js} f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell_q^s(L_p)} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left( 2^{js} \|f_j\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (1.2.1)$$

**Définition 1.2.2** Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 < p, q \leq \infty$ . L'espace de Besov noté  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble de  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  telle que  $(2^{js} \|\Delta_j f\|_p)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_q$

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \begin{cases} \left( \sum_{j \geq 0} \left( 2^{js} \|\Delta_j f\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } q \neq \infty \\ \sup_{j \geq 0} \left( 2^{js} \|\Delta_j f\|_p \right) & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

**Proposition 1.2.1** [8] Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 < p, q \leq \infty$  telle que:

1.  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace quasi-Banach (Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ ).
2.  $B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n)$  si  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , ( $C^s$  est l'espace de Hölder).

**Proposition 1.2.2** [8] Soient  $s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p_0, p, p_1, q_0, q_1, q \leq \infty$  alors :

1.  $B_{p,q_0}^{s_0} \hookrightarrow B_{p,q_1}^{s_1}$  si  $s_0 > s_1$ .
2.  $B_{p,q_0}^s \hookrightarrow B_{p,q_1}^s$  si  $q_0 \leq q_1$ .
3.  $B_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow B_{p_1,q_1}^{s_1}$  si  $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$  et  $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$ .

## 1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel

**Définition 1.2.3** (L'espace  $L_p(\ell_q^s)$ ) Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$ ,  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S'$  et  $\widehat{\text{supp } f_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < c2^j\}$ , alors

$$\left\| \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{L_p(\ell_q^s)} = \left\| \{2^{js} f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{L_p(\ell_q)} = \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} |f_j|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty. \quad (1.2.2)$$

**Définition 1.2.4** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$ , Espace de Lizorkin-Triebel noté  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble de  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  telle que:

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \begin{cases} \left\| \left( \sum_{j \geq 0} (2^{js} |\Delta_j f|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p & \text{si } q \neq \infty. \\ \left\| \sup_{j \geq 0} 2^{js} |\Delta_j f| \right\|_p & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 1.2.3** [7] Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 < q \leq \infty$ , telle que:

1.  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace quasi Banach (espace de Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ ).
2.  $F_{p,2}^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p < \infty$ .
3.  $F_{p,2}^m(\mathbb{R}^n) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p < \infty, m \in \mathbb{N}^*$ .

4.  $F_{p,2}^s(\mathbb{R}^n) = H_p^s(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p < \infty$ .
5.  $F_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$  si  $1 \leq p < \infty$ .

**Proposition 1.2.4** [8] Soient  $s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$  et  $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$ ,  $0 < p_0, p, p_1 < \infty$  telle que:

1.  $F_{p,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q_1}^{s_1}$  si  $s_0 > s_1$ .
2.  $F_{p,q_0}^s \hookrightarrow F_{p,q_1}^s$  si  $q_0 \leq q_1$ .
3.  $F_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p_1,q_1}^{s_1}$  si  $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$  et  $0 < p_0 < p_1 < \infty$ .

### 1.2.3 Exemples des fonctions dans l'espace de Besov

**Exemple 1.2.1**  $f(x) = vp_x^1$  (la valeur principale de  $\frac{1}{x}$ ).

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\xi) &= -i\pi \operatorname{sgn}\xi, \\ \operatorname{supp} \Delta_j^\wedge f &\subset \{\xi \in \mathbb{R} / |\xi| \leq 2^{j+1}\}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

d'après l'inégalité de Bernstein on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c_1 2^{j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\Delta_j f\|_2, \quad (p \geq 2) \tag{1.2.4}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_j f\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \Delta_j^\wedge f \right\|_2 \quad (\text{plancherel}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \varphi(2^{-j}\cdot) \hat{f} \right\|_2, \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \varphi(2^{-j}\cdot) \right\|_2, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{j}{2}} \|\varphi\|_2, \\ &= c_2 2^{\frac{j}{2}}. \end{aligned}$$

car  $\varphi \in D(\mathbb{R})$ .

En remplaçant dans (1.2.4), on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(1 - \frac{1}{p})}, \quad c = c_1 c_2 \text{ constante}$$

d'où

$$2^{sj} \|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(s+\frac{1}{p'})}.$$

La série  $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s+\frac{1}{p'})}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  converge si  $s < -\frac{1}{p'}$ , ce qui donne  $vp_x^{\frac{1}{p}} \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  dans les deux cas suivants:

1.  $s = -\frac{1}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $q = +\infty$  et  $\|f\|_{B_{p,+\infty}^{\frac{1}{p}}}} \leq \sup_{j \geq 0} 2^{-\frac{1}{p'}j} \|\Delta_j f\|_p$ .
2.  $s < -\frac{1}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $q = +\infty$  et  $\|f\|_{B_{p,\infty}^s}} < +\infty$ .

**Preuve.** de (1.2.3).

Soient  $g \in S'(\mathbb{R})$ ,  $\varphi \in S(\mathbb{R})$ , on a

$$\mathcal{F}(xg)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}g(\xi)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}f, \varphi \rangle &= \langle f, x\hat{\varphi} \rangle, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \exp(ix \cdot 0) \hat{\varphi}(x) dx, \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \hat{\varphi}(0), \\ &= 2\pi \varphi(0), \\ &= 2\pi \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}(xf)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) = 2\pi \delta \quad (\delta \text{ mesure de Dirac}),$$

ce qui donne

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\pi H(\xi) + a, \quad a \text{ constante.}$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside puisque  $\delta = H'$  en effet

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

$f$  est impaire donc  $\hat{f}$  est impaire ( $\mathcal{F}f(\xi) = -\mathcal{F}f(-\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ),

d'où

$$a = i\pi (H(\xi) + H(-\xi)) = i\pi, \quad \text{avec } H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

donc

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\pi H(\xi) + i\pi = \begin{cases} -i\pi & \text{si } \xi \geq 0 \\ i\pi & \text{si } \xi < 0 \end{cases} = -i\pi \operatorname{sgn} \xi.$$

■

**Exemple 1.2.2**  $f = \delta$  (mesure de Dirac)

Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

d'où

$$\Delta_j \delta = \varphi(2^{-j} \cdot).$$

Comme dans l'exemple (1.2.1), on obtient  $2^{sj} \|\Delta_j \delta\|_p \leq c 2^{j(s + \frac{n}{p'})}$ .

La série  $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s + \frac{n}{p'})q}$ , converge si  $s < -\frac{n}{p'}, 1 \leq q \leq +\infty$  ce qui donne  $\delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  dans les cas suivants:

1.  $s = -\frac{n}{p'}, 1 \leq p \leq +\infty, q = +\infty$ .
2.  $s < -\frac{n}{p'}, 1 \leq p, q \leq +\infty$ .

## 1.2.4 La multiplication dans une algèbre

**Définition 1.2.5** On dit qu'un espace vectoriel  $E$  est une algèbre s'il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\|f \cdot g\|_E \leq C \|f\|_E \cdot \|g\|_E, \forall (f, g) \in E \times E.$$

**Théorème 1.2.1** [7] Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 < q \leq \infty$

1. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes telle que  $0 < p \leq \infty$

- (i)  $B_{p,q}^s$  est une algèbre,
- (ii)  $B_{p,q}^s \hookrightarrow L_\infty$ ,
- (iii)  $s > \frac{n}{p}$  ou  $s = \frac{n}{p}$  et  $0 < q \leq 1$ .

2. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes telle que  $0 < p < \infty$

- (i)  $F_{p,q}^s$  est une algèbre,
- (ii)  $F_{p,q}^s \hookrightarrow L_\infty$ ,
- (iii)  $s > \frac{n}{p}$  ou  $s = \frac{n}{p}$  et  $0 < q \leq 1$ .

**Remarque 1.2.1** [7] Dans le cas  $s = 0$ , on a

1.  $F_{p,q}^0 \cdot F_{p,q}^0 \not\subseteq F_{p,q}^0$ .
2.  $B_{p,q}^0 \cdot B_{p,q}^0 \not\subseteq B_{p,q}^0$ .

**Lemme 1.2.1** [8]

1. Soient  $s \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$  alors

$$B_{p,q_0}^s \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,q_1}^s \quad \text{si } q_0 \leq \min(p, q), q_1 \geq \max(p, q).$$

2. Soient  $0 < p_0 < p < p_1 \leq \infty$ , et  $s_0 - \frac{n}{p_0} = s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$  alors

$$B_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_1,q_1}^{s_1} \quad \text{si } 0 < q_0 \leq p \leq q_1 \leq \infty.$$

3. Soient  $0 < p < p_1 \leq \infty$  et  $s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$  alors

$$F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_1,q}^{s_1}.$$

**Lemme 1.2.2**

Soit  $0 < p < 1$  et  $s > \frac{n}{p} - n$ .

(i) Il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\|f\|_{L_p} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s}, \quad \forall f \in F_{p,q}^s.$$

(ii) Il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\|f\|_{L_p} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}, \quad \forall f \in B_{p,q}^s.$$

## 1.3 L'interpolation

### 1.3.1 L'interpolation dans $L_p(\mathbb{R}^n)$

**Théorème 1.3.2 (Riesz-Thorin)**

Soient  $\theta \in ]0, 1[$  et  $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$  telle que  $p_0 \neq p_1$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ .



Alors, on a

$$[L_{p_0}(\mathbb{R}^n), L_{p_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta = L_p(\mathbb{R}^n).$$

### 1.3.2 L'interpolation dans $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$

**Proposition 1.3.5** Soit  $T$  un opérateur linéaire de  $H$  dans lui même telle que

$$\|Tf\|_{A_0} \leq c_0 \|f\|_{A_0}, \quad \forall f \in A_0,$$

$$\|Tf\|_{A_1} \leq c_1 \|f\|_{A_1}, \quad \forall f \in A_1.$$

Alors  $T$  envoie  $(A_0, A_1)_{\theta,q}$  dans lui même avec

$$\|Tf\|_{(A_0, A_1)_{\theta,q}} \leq c \|f\|_{(A_0, A_1)_{\theta,q}},$$

où

$$c \leq c_0^{1-\theta} c_1^\theta, \quad 0 < \theta < 1 \text{ et } 0 < q \leq +\infty.$$

### 1.3.3 L'interpolation réelle

Les théorèmes suivants sont tous démontré dans le livre de Triebel [7].

**Théorème 1.3.3** Soient  $q_0, q_1, q \in ]0, +\infty], 0 < \theta < 1$  et  $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$  telle que  $s_0 \neq s_1$  et  $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ .

(i) Si  $0 < p \leq +\infty$ , alors

$$(B_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Si  $0 < p < +\infty$ , alors

$$(F_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), F_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

**Théorème 1.3.4** Soient  $p_0, p_1 \in ]0, +\infty[, 0 < \theta < 1$  et  $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$  et  $s_0 \neq s_1$  et  $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ .

Alors

$$(B_{p_0,p_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p_1,p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n).$$

## 1.4 Inégalité principale

### Théorème 1.4.5 (Inégalité de Hölder)

Soient  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p, q \leq \infty$ , alors  $f.g \in L_r$  et

$$\|f.g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\right).$$

### Théorème 1.4.6 (Inégalité de Minkowski)

Pour tout  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , et  $X$  un élément dans  $\ell_p(\ell_q)$ , alors

$$\|X\|_{\ell_q(\ell_p)} \leq \|X\|_{\ell_p(\ell_q)}.$$

### Théorème 1.4.7 (Inégalité de Young)

Soient  $1 \leq p, q, r \leq +\infty$  telle que  $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Alors pour toute  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ , on a  $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

### Théorème 1.4.8 (Inégalité de Bernstein)

Soient  $0 \leq p \leq q \leq \infty$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Il existe  $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$ , telle que pour toute  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ , avec  $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n / |\xi| < R\}$ , on a

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

**Lemme 1.4.3** Soient  $0 < b < 1$  et  $0 < q \leq \infty$ . Pour toute suite réelle à termes positifs  $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  dans  $\ell_q(\mathbb{N})$ , les suites  $\left\{ \sum_{j=0}^k b^{k-j} \varepsilon_j \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\left\{ \sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k} \varepsilon_j \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  appartiennent à  $\ell_q(\mathbb{N})$ . De plus, il existe une constante  $c = c(b, q) > 0$  telle que

$$\left\| \left\{ \sum_{j=0}^k b^{k-j} \varepsilon_j \right\}_{k \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell_q} + \left\| \left\{ \sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k} \varepsilon_j \right\}_{k \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell_q} \leq c \|\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\ell_q}. \quad (1.3.1)$$

La valeur existe de  $c$  est:  $\left(\frac{1}{1-b}\right)$ .

**Lemme 1.4.4** Soient  $0 < p \leq \infty$ ,  $y > 0$ . Pour toute suite  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S'(\mathbb{R}^n) \cap L_p$ , telle que

$$\text{supp } \hat{f}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq y2^j\},$$

alors

$$\|\Delta_k f_j\|_p \leq c 2^{(j-k)\varrho} \|f_j\|_p. \quad (1.3.2)$$

Avec  $k \leq j < \infty$  et  $\varrho = \max\left(0, \frac{n}{p} - n\right)$ , avec  $c$  dépend de  $n, p$  et  $y$ .

**Lemme 1.4.5** Soient  $0 < p < 1$  et  $y > 0$ , pour toute suite  $\{f_j\} \subset L_p$ , telle que

$$\text{supp } \widehat{f_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq y 2^j\},$$

alors

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{B_{p,\infty}^{\varrho}} \leq c \left\| \{2^{j\varrho} f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{L_p(\ell_{\infty})}. \quad (1.3.3)$$

Avec  $\varrho = \frac{n}{p} - n$ , avec  $c$  dépend de  $n, p$  et  $y$ .

# Chapitre 2

## La multiplication ponctuelle du type

$$A \cdot A \hookrightarrow A \text{ avec } A \equiv B \text{ ou } A \equiv F$$

Dans ce chapitre, nous étudions les inclusions du type  $B \times B \hookrightarrow B$  ou  $F \times F \hookrightarrow F$ , et on a donner quelques définitions et quelques propositions.

### 2.1 Rappel

**Définition 2.1.1** Soient  $A_0, A_1$  et  $A_2$  trois espaces de Banach, on dit que  $A_0 \cdot A_1 \hookrightarrow A_2$  si pour toute fonction  $f$  appartient à  $A_0$  et  $g$  appartient à  $A_1$ , on a  $f \cdot g$  appartient à  $A_2$ , de plus il existe  $c > 0$  telle que

$$\|f \cdot g\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_0} \|g\|_{A_1}.$$

**Définition 2.1.2** Soit  $E$  un espace de Banach de distribution ( $E.B.D'$ ) contenant  $D(\mathbb{R}^n)$  comme sous espace dense, on dit que  $U \in D'(\mathbb{R}^n)$  est un multiplicateur de  $E$  (i.e  $U \in M(E)$ ), s'il existe une constante  $c > 0$ , telle que toute  $\phi \in C^\infty \cap E$ , on a  $U\phi \in E$  et

$$\|U\phi\|_E \leq c \|\phi\|_E.$$

On munit  $M(E)$  par la norme

$$\|U\|_{M(E)} = \sup \{ \|U\phi\|_E ; \|\phi\|_E = 1, \text{ pour tout } \phi \in C^\infty \cap E \},$$

et on a

$$M(A_{p,q}^s) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n), fg \in A_{p,q}^s, \forall g \in A_{p,q}^s\},$$

telle que  $A_{p,q}^s \equiv B_{p,q}^s$  ou  $A_{p,q}^s \equiv F_{p,q}^s$ .

### Notation 2.1.1

Soit  $B_p$ : l'ensemble des fonctions analytiques

$$B_p = \{b; \quad b = \{b_k\}_{k=0}^\infty, \quad b_k \in S'(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)\},$$

telle que

$$\text{supp } \widehat{b}_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq 2\}, \quad \text{supp } \widehat{b}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots\},$$

$$B_p^* = \left\{ b = \{b_k\}_{k=0}^\infty \subset S'(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \widehat{b}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq 2^k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

### Proposition 2.1.1 [11] ou [8]

Soit  $b \in B_p$ .

(i) Si  $\|2^{js}b_j\|_{L_p(\ell_q)} = A < \infty$ , alors la série  $\sum_{j=0}^\infty b_j$  converge dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  vers une fonction  $f \in F_{p,q}^s$ , et on a  $\|f\|_{F_{p,q}^s} \leq cA$ , avec  $c$  est indépendant de  $b$ .

(ii) Si  $\|2^{js}b_j\|_{\ell_q(L_p)} = A < \infty$ , alors la série  $\sum_{j=0}^\infty b_j$  converge dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  vers une fonction  $f \in B_{p,q}^s$ , et on a  $\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq cA$ , avec  $c$  est indépendant de  $b$ .

### Proposition 2.1.2 [7] ou [8]

On suppose que  $b \in B_p^*$ .

(i) Soit  $s > \sigma_{p,q} = n \max\left(0, \frac{1}{p} - 1, \frac{1}{q} - 1\right)$ . Si  $\|2^{js}b_j\|_{L_p(\ell_q)} = A < \infty$ , alors la série  $\sum_{j \geq 0} b_j$  converge dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  vers une fonction  $f \in F_{p,q}^s$ , et on a  $\|f\|_{F_{p,q}^s} \leq cA$ , avec  $c$  est indépendant de  $b$ .

(ii) Soit  $s > \sigma_p = n \max\left(0, \frac{1}{p} - 1\right)$ . Si  $\|2^{js}b_j\|_{\ell_q(L_p)} = A < \infty$ , alors la série  $\sum_{j \geq 0} b_j$  converge dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  vers une fonction  $f \in B_{p,q}^s$ , et on a  $\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq cA$ , avec  $c$  est indépendant de  $b$ .

## 2.2 Multiplication du type $F \cdot F \hookrightarrow F$ et $B \cdot B \hookrightarrow B$

Nous estimons les normes suivantes  $\|\pi_i(f, g)\|_{F_p^{s,q}}$  et  $\|\pi_i(f, g)\|_{B_p^{s,q}}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) pour utiliser par la suite.

### Lemme 2.2.1 [8]

Soit  $s < 0$ .

$$(i) \left\| \sup_{\ell=0,1,2} |Q_\ell f| \right\|_p \leq c \|f\|_{F_{p,2}^0}, \quad \forall f \in F_{p,2}^0, \text{ et pour } p = \infty \text{ on a}$$

$$\left\| \sup_{\ell=0,1,2} |Q_\ell f| \right\|_\infty \leq c \|f\|_\infty, \quad \forall f \in L_\infty.$$

$$(ii) \|2^{\ell s} |Q_\ell f|\|_{L_p(\ell_q)} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s}, \quad \forall f \in F_{p,q}^s.$$

$$(iii) \|2^{\ell s} |Q_\ell f|\|_{\ell_q(L_p)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}, \quad \forall f \in B_{p,q}^s.$$

### Proposition 2.2.3 [8]

Soit  $s < 0$  et  $1 \leq p < \infty$ . On pose  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ , alors on a

$$(i) \|\pi_1(f, g)\|_{F_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{F_{r_1,q}^s} \|g\|_{F_{r_2,2}^0} \text{ où } c \text{ est indépendant de } f \text{ et } g.$$

- Si  $r_2 = \infty$ , on remplace  $\|g\|_{F_{r_2,\infty}^0}$  par  $\|g\|_\infty$ .

$$(ii) \|\pi_1(f, g)\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{B_{r_1,q}^s} \|g\|_{F_{r_2,\infty}^0} \text{ où } c \text{ est indépendant de } f \text{ et } g.$$

- Si  $r_2 = \infty$ , on remplace  $\|g\|_{F_{r_2,\infty}^0}$  par  $\|g\|_\infty$ .

#### Preuve.

(1) Preuve de (i) en utilisant la proposition (2.1.1) et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} Q_{k-2} f \cdot \Delta_k g \right\|_{F_{p,q}^s} &\leq c \|2^{ks} Q_{k-2} f \cdot \Delta_k g\|_{L_p(\ell_q)}, \\ &\leq c \|2^{ks} Q_{k-2} f\|_{L_{r_1}(\ell_q)} \|\Delta_k g\|_{L_{r_2}(\ell_\infty)}. \end{aligned}$$

(2) De la même pour (ii), i.e.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} Q_{k-2} f \cdot \Delta_k g \right\|_{B_{p,q}^s} &\leq c \|2^{ks} Q_{k-2} f \cdot \Delta_k g\|_{L_p(\ell_q)}, \\ &\leq c \|2^{ks} Q_{k-2} f\|_{L_{r_1}(\ell_q)} \|\Delta_k g\|_{L_{r_2}(\ell_\infty)}. \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.2.4** [8]

Soit  $s < 0$  et  $1 \leq p < \infty$ . On pose  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ , alors on a

- (i)  $\|\pi_3(f, g)\|_{F_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{F_{r_1,q}^s} \|g\|_{F_{r_2,2}^0}$  où  $c$  est indépendant de  $f$  et  $g$ .
- Si  $r_2 = \infty$ , on remplace  $\|g\|_{F_{r_2,2}^0}$  par  $\|g\|_\infty$ .
- (ii)  $\|\pi_3(f, g)\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{B_{r_1,q}^s} \|g\|_{F_{r_2,2}^0}$  où  $c$  est indépendant de  $f$  et  $g$ .
- Si  $r_2 = \infty$ , on remplace  $\|g\|_{F_{r_2,2}^0}$  par  $\|g\|_\infty$ .

**Proposition 2.2.5** [8]

Soit  $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$  tel que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  et  $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ,

- (i) Si on pose  $s_1 + s_2 > \sigma_p = n \max\left(0, \frac{1}{p} - 1\right)$  et  $q \geq p$ , alors

$$\max_{-1 \leq j \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} Q_{k+j} f \cdot \Delta_k g \right\|_{F_{p,q}^{s_1+s_2}} \leq c \|f\|_{F_{r_1,q_1}^{s_1}} \|g\|_{F_{r_2,q_2}^{s_2}},$$

où  $c$  est indépendant de  $f$  et  $g$ .

- (ii) Soit  $d = \min(1, p, q)$ , On pose  $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$  et  $s_1 + s_2 = \sigma_p$ , alors

$$\max_{-1 \leq j \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k+j} f \cdot \Delta_k g \right\|_{B_{p,\infty}^{s_1+s_2}} \leq c \|f\|_{B_{r_1,q_1}^{s_1}} \|g\|_{B_{r_2,q_2}^{s_2}},$$

où  $c$  est indépendant de  $f$  et  $g$ .

**Preuve.**

- (i) On observe que  $\text{supp} \left( \sum_{\ell=k-1}^{k+1} Q_\ell f \cdot \Delta_k g \right)^\wedge \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n / |\xi| \leq c2^k\}$ , ce qui permet d'appliquer la proposition (2.1.2), et de trouver

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k+j} f \cdot \Delta_k g \right\|_{F_{p,q}^{s_1+s_2}} &\leq c \left\| 2^{k(s_1+s_2)} \Delta_{k+j} f \cdot \Delta_k g \right\|_{L_p(\ell_q)}, \\ &\leq \left\| 2^{ks_1} \Delta_{k+j} f \cdot 2^{ks_2} \Delta_k g \right\|_{L_p(\ell_q)}, \\ &\leq \left\| 2^{ks_1} \Delta_{k+j} f \right\|_{L_{r_1}(\ell_{q_1})} \left\| 2^{ks_2} \Delta_k g \right\|_{L_{r_2}(\ell_{q_2})}, \end{aligned}$$

donc

$$\max_{-1 \leq j \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k+j} f \cdot \Delta_k g \right\|_{F_{p,q}^{s_1+s_2}} \leq c \|f\|_{F_{r_1,q_1}^{s_1}} \|g\|_{F_{r_2,q_2}^{s_2}},$$

avec  $c$  est indépendant de  $f$  et  $g$ .

- (ii) De la même manière on démontre la deuxième partie de la proposition (2.2.5) ■

**Théorème 2.2.1** [8]

Soit

$$\begin{cases} s_1 < 0 < s_2 \\ s_1 + s_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &\leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \\ \frac{1}{p} &> \frac{1}{p_1} + \frac{1}{n} \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+ \\ s_1 + s_2 &> n \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 \right) \text{ et } q \geq q_1. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (i) \quad & F_{p_1, q_1}^{s_1} \cdot F_{p_2, q_2}^{s_2} \hookrightarrow F_{p, q}^{s_1} \\ (ii) \quad & B_{p_1, q_1}^{s_1} \cdot B_{p_2, q_2}^{s_2} \hookrightarrow B_{p, q}^{s_1} \end{aligned}$$

**Preuve.**

(1) Nous allons estimer  $\pi_i(f, g)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) en norme de  $F_{p, q}^{s_1}$

**Estimation de  $\pi_1(f, g)$ .**

En appliquant la proposition (2.2.3), on obtient

$$\|\pi_1(f, g)\|_{F_{p, q}^{s_1}} \leq \|f\|_{F_{r_1, q}^{s_1}} \|g\|_{F_{r_2, 2}^0}, \text{ avec } \frac{1}{p} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

On a aussi

$$F_{p_2}^{s_2, q_2} \hookrightarrow \begin{cases} F_{r_2}^{0, 2}, & r_2 < \infty \\ L^\infty, & r_2 = \infty. \end{cases} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{n} \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+.$$

Donc

$$\|\pi_1(f, g)\|_{F_{p, q_1}^{s_1}} \leq c \|f\|_{F_{p_1, q_1}^{s_1}} \|g\|_{F_{p_2, q_2}^{s_2}}.$$

**Estimation de  $\pi_2(f, g)$ .**

Comme  $\pi_2(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_{k-1}f + \Delta_k f + \Delta_{k+1}f) \cdot \Delta_k g$ , où  $\Delta_{-1}f \equiv 0$ , et si on a  $s_1 + s_2 > 0$  et  $s_1 + s_2 > n \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 \right)$ , alors

$$\|\pi_2(f, g)\|_{F_{r, \infty}^{s_1 + s_2}} \leq c \|f\|_{F_{p_1, q_1}^{s_1}} \|g\|_{F_{p_2, q_2}^{s_2}}, \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}.$$



On observe que

$$F_{r,\infty}^{s_1+s_2} \hookrightarrow F_{p,q}^{s_1}.$$

$$\text{car } \left( s_1 + s_2 - \frac{n}{r} \geq s_1 - \frac{n}{p} \right) \Leftrightarrow \left( \frac{n}{p} \geq \frac{n}{p_1} + \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+ \right).$$

Et  $s_2 > 0$ ,  $r \leq p$ , donc on a

$$\|\pi_2(f, g)\|_{F_{p,q}^{s_1}} \leq \|\pi_2(f, g)\|_{F_{r,\infty}^{s_1+s_2}} \leq c \|f\|_{F_{p_1,q_1}^{s_1}} \|g\|_{F_{p_2,q_2}^{s_2}},$$

$$\|\pi_2(f, g)\|_{F_{p,q}^{s_1}} \leq c \|f\|_{F_{p_1,q_1}^{s_1}} \|g\|_{F_{p_2,q_2}^{s_2}}.$$

**Estimation de  $\pi_3(f, g)$ .**

En appliquant la proposition (2.2.4), on trouve

$$\|\pi_3(f, g)\|_{F_{p,q}^{s_1}} \leq c \|f\|_{F_{p_1,q}^{s_1}} \|g\|_{F_{r_1,2}^0}, \text{ où } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r_2}.$$

**Les conditions** 
$$\begin{cases} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r_2} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{n} \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+ \\ \frac{1}{p_2} \geq \frac{1}{r_2} > \frac{1}{n} \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+ \end{cases}$$

donnent

$$\|g\|_{F_{r_2,2}^0} \leq c \|g\|_{F_{p_2,q_2}^{s_2}}.$$

Car  $F_{p_2,q_2}^{s_2} \hookrightarrow F_{r_2,2}^0$  si  $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{n} \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+$ ,  $r_2 < \infty$ . Comme  $r_2 = \infty$  alors  $F_{p_2,q_2}^{s_2} \hookrightarrow L_\infty$ , donc

$$\|\pi_3(f, g)\|_{F_{p,q}^{s_1}} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s_1}} \|g\|_{F_{r_2,2}^0},$$

(2) Pour la preuve de (ii) il suffit de prendre l'inégalité :

$$\|\pi_2(f, g)\|_{B_{r,q}^{s_1+s_2}} \leq c \|f\|_{B_{p_1,q}^{s_1}} \|g\|_{B_{p_2,\infty}^{s_2}},$$

les inclusions

$$B_{r,q}^{s_1+s_2} \hookrightarrow B_{p_1,q}^{s_1}.$$

et

$$B_{p_2,q_2}^{s_2} \hookrightarrow \begin{cases} F_{r_2,2}^0, & r_2 < \infty \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{n} \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+ \\ L_\infty, & r_2 = \infty. \end{cases}$$

■

**Théorème 2.2.2** [8]

Soient  $0 < p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \leq \infty, s_1 < 0$  et  $s_2 > 0$ . On suppose

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &\leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \\ s_1 + s_2 &\geq n \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &\geq q_1 \\ \frac{1}{p} &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{n} \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+ \end{aligned}$$

alors

(i) Si  $s \neq \frac{n}{p_2}$  ou  $s = \frac{n}{p_2}$  et  $q_2 \leq 1$ , on a

$$F_{p_1, q_1}^{s_1} \cdot F_{p_2, q_2}^{s_2} \hookrightarrow F_{p, q}^{s_1}.$$

(ii) Si  $s < \frac{n}{p_2}$  et  $q_2 \leq \frac{n}{\frac{n}{p_2} - s_2}$ , ou  $s = \frac{n}{p_2}$  et  $q_2 \leq 1$ , ou  $s > \frac{n}{p_2}$ , on a

$$B_{p_1, q_1}^{s_1} \cdot B_{p_2, q_2}^{s_2} \hookrightarrow B_{p, q}^{s_1}.$$

**Remarque 2.2.1**

Soient  $s_1, s_2, p, p_1, p_2, q, q_1, q_2$  comme dans le théorème (2.2.2). Si  $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{n} \left( \frac{n}{p_2} - s_2 \right)_+$  alors

$$\begin{aligned} F_{p_1, q_1}^{s_1} \cdot \left( F_{p_2, q_2}^{s_2} \cap L^{r_2} \right) &\hookrightarrow F_{p, q}^{s_1}, \\ B_{p_1, q_1}^{s_1} \cdot \left( B_{p_2, q_2}^{s_2} \cap L^{r_2} \right) &\hookrightarrow B_{p, q}^{s_1}. \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.3** [4]

Soient  $0 < p_1, p_2 < \infty, 0 < q \leq \infty$  et  $\frac{n}{p_1} - n < s < \frac{n}{p_1}$ , alors

$$F_{p_1, q}^s \cdot \left( F_{p_2, \infty}^{\frac{n}{p_1}} \cap L_\infty \right) \hookrightarrow F_{p_1, q}^s.$$

**Preuve.**

Soient  $f \in F_{p_1, q}^s$  et  $g \in F_{p_2, \infty}^{\frac{n}{p_1}} \cap L_\infty$ , on estime  $\Delta_{k(i)}(gf), (i = 1, 2, 3)$  en norme de  $L_{p_1}(\ell_q)$ .

**Estimation de  $\Delta_{k(1)}(gf)$ .**

$$\begin{aligned}
 \|2^{ks} \Delta_{k(1)}(gf)\|_{L_{p_1}(\ell_q)} &= \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{s_j q} |\Delta_{k(1)}(gf)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{p_1}, \\
 &\leq \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{s_j q} |Q_{k+1}g \cdot \tilde{\Delta}_k f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{p_1}, \\
 &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{k \in \mathbb{N}} |Q_{k+1}g| \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{s_j q} |\Delta_k f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{p_1}, \\
 &\leq \|g\|_{\infty} \|f\|_{F_{p_1, q}^s}.
 \end{aligned}$$

**Estimation de  $\Delta_{k(2)}(gf)$ .**

De la même technique on obtient

$$\|2^{ks} \Delta_{k(2)}(gf)\|_{L_{p_1}(\ell_q)} \leq c \|g\|_{B_{p_2, \infty}^{\frac{n}{p_2}}} \|f\|_{F_{p_1, q}^s}.$$

Par l'inclusion

$$F_{p_2, \infty}^{\frac{n}{p_2}} \hookrightarrow B_{p_2, \infty}^{\frac{n}{p_2}}.$$

on a

$$\|2^{ks} \Delta_{k(2)}(gf)\|_{L_{p_1}(\ell_q)} \leq c \|g\|_{F_{p_2, \infty}^{\frac{n}{p_2}}} \|f\|_{F_{p_1, q}^s}.$$

**Estimation de  $\Delta_{k(3)}(gf)$ .**

En utilisant la proposition (2.1.1), il vient

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k(3)}(gf) \right\|_{F_{t, \infty}^{s + \frac{n}{p_2}}} \leq c \|g\|_{F_{p_2, \infty}^{\frac{n}{p_2}}} \|f\|_{F_{p_1, q}^s}.$$

Où

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \text{ et } s + \frac{n}{p_2} > \max\left(0, \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} - n\right).$$

Par l'inclusion

$$F_{t, \infty}^{s + \frac{n}{p_2}} \hookrightarrow F_{p_1, q}^s,$$

on a

$$\left\| \sum_{k \geq 0} \Delta_{k(3)}(gf) \right\|_{F_{p_1, q}^s} \leq c \|g\|_{F_{p_2, \infty}^{\frac{n}{p_2}}} \|f\|_{F_{p_1, q}^s}.$$

■

**Théorème 2.2.4** [6]

Soient

$$\begin{aligned} t &\geq 0 \\ n \max \left( 0, \frac{1}{p} - 1, \frac{1}{q} - 1 \right) &< s < \frac{n}{p} + t, \\ 0 < p < p_1 < \infty \text{ et } 0 < q &\leq \infty, \end{aligned}$$

alors

$$F_{p_1, \infty}^{\frac{n}{p} + t} \hookrightarrow M \left( F_{p, q}^s \right).$$

**Preuve.**

Soient  $g \in F_{p_1, \infty}^{\frac{n}{p} + t}$  et  $f \in F_{p, q}^s$ , on a

$$fg = \sum_{j \geq 0} \Delta_j f \cdot Q_j g + \sum_{k \geq 1} \Delta_k g \cdot Q_{k-1} f = U_1 + U_2.$$

On estime successivement  $U_1, U_2$  en norme de  $F_{p, q}^s$ .

**Estimation de  $U_1$ .**

La proposition (2.1.1) donne

$$\begin{aligned} \|U_1\|_{F_{p, q}^s} &= \left\| \sum_{j \geq 0} \Delta_j f \cdot Q_j g \right\|_{F_{p, q}^s}, \\ &\leq c \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{s_j q} |\Delta_j f \cdot Q_j g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p, \end{aligned}$$

mais  $|Q_j g| \leq \|g\|_{\infty} \leq c \|g\|_{F_{p_1, \infty}^{\frac{n}{p} + t}}$ , donc

$$\|U_1\|_{F_{p, q}^s} \leq c \|g\|_{F_{p_1, \infty}^{\frac{n}{p} + t}} \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j s q} |\Delta_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p.$$

D'où  $\|U_1\|_{F_{p, q}^s} \leq c \|g\|_{F_{p_1, \infty}^{\frac{n}{p} + t}} \|f\|_{F_{p, q}^s}$ .

**Estimation de  $U_2$ .**

De la même façon on a

$$\begin{aligned}
 \|U_2\|_{F_{p,q}^s} &\leq c \left\| \left( \sum_{j \geq 1} 2^{jsq} |\Delta_j g \cdot Q_{j-1} f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p, \\
 &\leq c \left\| \left( \sum_{j \geq 1} 2^{(s-\frac{n}{p}-t)jq} |Q_{j-1} f|^q 2^{(\frac{n}{p}+t)jq} |\Delta_j g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p, \\
 &\leq c \left\| \sup_{j \geq 0} 2^{-(\frac{n}{p}+t)jq} |\Delta_j g| \right\|_{p_1} \left\| \left( \sum_{j \geq 1} 2^{(s-\frac{n}{p}-t)jq} |Q_{j-1} f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{p_2}, \text{ avec } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p},
 \end{aligned}$$

alors

$$\|U_2\|_{F_{p,q}^s} \leq c \|g\|_{F_{p_1,q}^{s-\frac{n}{p}+t}} \|f\|_{F_{p,q}^s},$$

car

$$s - \frac{n}{p} - t < 0 \text{ et } F_{p,q}^s \hookrightarrow F_{p_2,q}^{s-\frac{n}{p}} \hookrightarrow F_{p_2,q}^{s-\frac{n}{p}-t}.$$

■

# Chapitre 3

## La multiplication ponctuelle du type

$$F.B \hookrightarrow F$$

Dans ce chapitre, nous étudions la multiplication ponctuelle dans les espaces de Besov et dans les espaces Lizorkin-Triebel, en utilisant quelques définitions et quelques propositions.

### 3.1 Rappel

**Définition 3.1.1** *A toute fonction localement intégrable  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on associe sa fonction maximale définie par*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

où  $B(x,r)$  est la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

**Proposition 3.1.1** [10] *Soient  $1 < p < \infty$ , alors il existe une constante  $c = c(n,p) > 0$  telle que pour tout  $g \in L_p$  on a*

$$\|Mg\|_p \leq c \|g\|_p.$$

**Proposition 3.1.2** [9] *Soient  $0 < t, b < \infty$  et  $f$  une fonction telle que  $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq b\}$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^{\frac{n}{t}}} \leq c (M|f|^t(x))^{\frac{1}{t}}.$$

**Définition 3.1.2** Soient  $f \in S'$  et  $a > 0$ . On définit les opérateurs maximaux associés aux  $\Delta_k$  et  $Q_k$  par :

$$\Delta_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_k f(x-y)|}{1 + (2^k |y|)^a} \quad \text{et} \quad Q_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_k f(x-y)|}{1 + (2^k |y|)^a}.$$

**Remarque 3.1.1** [11] ou [12] Soient la fonction de Fefferman-Stein qui définit par

$$(\Delta_k^{*,a} f)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_k f(x-y)|}{1 + (2^k |y|)^a}, \quad (x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad k = 0, 1, 2, \dots).$$

(1) Pour tout  $a > \frac{n}{\min(p,q)}$ , on a

$$\|2^{ks} \Delta_k^{*,a} f\|_{L_p(\ell_q)} \sim \|f\|_{F_{p,q}^s}.$$

(2) Pour tout  $a > \frac{n}{p}$ , on a

$$\|2^{ks} \Delta_k^{*,a} f\|_{\ell_q(L_p)} \sim \|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

**Lemme 3.1.1**

Soient  $0 < p < \infty$  et  $a > \frac{n}{p}$ . Il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\|Q_j^{*,a} g\|_{L_p(\ell_\infty)} \leq c \|g\|_{F_{p,2}^0}, \quad (3.1.1)$$

pour toute  $g \in F_{p,2}^0$ .

**Preuve.** La preuve du lemme précédent n'est pas compliqué. Il suffit de prendre  $t > 0$  telle que  $\frac{n}{a} < t < p$ , la proposition (3.1.2) donne l'existence d'une constante  $c$ , indépendante de  $j$ , telle que

$$Q_j^{*,a} g(x) \leq Q_j^{*,\frac{n}{t}} g(x) \leq c \left( (M |Q_j g|^t)(x) \right)^{\frac{1}{t}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a} g(x) \right\|_{L_p} &\leq \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,\frac{n}{t}} g(x) \right\|_{L_p}, \\ &\leq c_1 \left\| \left( \sup_{j \in \mathbb{N}} M |Q_j g(x)|^t \right)^{\frac{1}{t}} \right\|_{L_p}, \\ &= c_1 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \left( \sup_{j \in \mathbb{N}} M |Q_j g(x)|^t \right)^{\frac{1}{t}} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} M |Q_j g(x)|^t \right\|_{L_{\frac{p}{t}}}^{\frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

On applique la proposition (3.1.1), on obtient

$$\left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} M |Q_j g(x)|^t \right\|_{L^{\frac{p}{t}}}^{\frac{1}{t}} \leq c_2 \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} |Q_j g|^t \right\|_{L^{\frac{p}{t}}}^{\frac{1}{t}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a} g(x) \right\|_{L_p} &\leq c \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} |Q_j g|^t \right\|_{L^{\frac{p}{t}}}^{\frac{1}{t}}, \\ &= c \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} |Q_j g| \right\|_{L_p} = c \|g\|_{F_{p,\infty}^0}, \\ &\leq c \|g\|_{F_{p,2}^0} \quad \text{puisque } (F_{p,q_1}^s \hookrightarrow F_{p,q_2}^s \text{ si } q_1 \leq q_2). \end{aligned}$$

■

## 3.2 Multiplication du type $F \cdot B \hookrightarrow F$

**Théorème 3.2.1** Soient  $0 < p, p_1, p_2 < \infty$ ,  $0 < q, q_2 \leq \infty$ ,  $-\infty < s < \infty$ , et  $r > 0$  telle que

$$-r + \max \left( 0, \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} - n \right) < s < \min \left( \frac{n}{p_1}, r \right), \quad (3.2.1)$$

et

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n}, \quad \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n}, \quad r < \frac{n}{p_2}. \quad (3.2.2)$$

Alors

$$F_{p_1,q}^s \cdot B_{p_2,q_2}^r \hookrightarrow F_{p,q}^s.$$

**Preuve.** Soient  $f \in F_{p_1,q}^s$  et  $g \in B_{p_2,q_2}^r$ . D'après la décomposition de  $f \cdot g$ , on obtient

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(f \cdot g).$$

On calcule  $f \cdot g$  en norme de  $F_{p,q}^s$  et d'après le lemme (1.4.5) on trouve

$$\|f \cdot g\|_{F_{p,q}^s} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k(i)}(f \cdot g) \right\|_{F_{p,q}^s} \leq c \left\| \{2^{ks} \Delta_{k(i)}(f \cdot g)\} \right\|_{L_p(\ell_q)}.$$



On estime respectivement  $\Delta_{k(1)}(f \cdot g)$ ,  $\Delta_{k(2)}(f \cdot g)$  et  $\Delta_{k(3)}(f \cdot g)$  en norme de  $L_p(\ell_q^s)$

(i) **Estimation de  $\Delta_{k(1)}(f \cdot g)$**

$$\begin{aligned}
 |\Delta_{k(1)}(f \cdot g)(x)| &= \left| \Delta_k \left( Q_{k+1}g \cdot \widetilde{\Delta}_k f \right) (x) \right|, \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} 2^{kn} \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^k y) \left( Q_{k+1}g \cdot \widetilde{\Delta}_k f \right) (x - y) dy \right|, \\
 &\leq c' \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1} \gamma(2^k y)| |Q_{k+1}g(x - y)| |\widetilde{\Delta}_k f(x - y)| dy, \\
 &\leq c' \int_{\mathbb{R}^n} (1 + (2^k |y|)^{a_1}) (1 + (2^k |y|)^{a_2}) |\mathcal{F}^{-1} \gamma(2^k y)| \frac{|Q_{k+1}g(x - y)| |\widetilde{\Delta}_k f(x - y)|}{(1 + (2^k |y|)^{a_1}) + (1 + (2^k |y|)^{a_2})} dy \\
 &\leq c' (Q_{k+1}^{*,a_1} g) \left( \widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f \right) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + (2^k |y|)^{a_1}) (1 + (2^k |y|)^{a_2}) |\mathcal{F}^{-1} \gamma(2^k y)| dy, \\
 &\leq c (Q_{k+1}^{*,a_1} g) \left( \widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f \right).
 \end{aligned}$$

Où  $Q_{k+1}^{*,a_1} g$  et  $\widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f$  sont définies comme dans la remarque (3.1.1)

Alors

$$|\Delta_{k(1)}(f \cdot g)| \leq c \left( \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g \right) \left( \widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f \right).$$

Donc

$$2^{ks} |\Delta_{k(1)}(f \cdot g)| \leq c \left( \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g \right) \left( 2^{ks} \widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f \right).$$

ce qui implique :

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (2^{ks} |\Delta_{k(1)}(f \cdot g)|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left( \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g \right) \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (2^{ks} \widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Alors

$$\|2^{ks} \Delta_{k(1)}(f \cdot g)\|_{\ell_q} \leq c \left( \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g \right) \|2^{ks} \widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\|_{\ell_q}. \quad (3.2.3)$$

On prend la relation (3.2.3) en norme de  $L_p$ , alors

$$\|2^{ks} \Delta_{k(1)}(f \cdot g)\|_{L_p(\ell_q)} \leq c \left\| \left( \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g \right) \|2^{ks} \widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\|_{\ell_q} \right\|_{L_p}. \quad (3.2.4)$$

D'après la relation (3.2.2), on pose  $\frac{1}{b} = \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n}$ , alors  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{b}$ , nous appliquons dans la relation (3.2.4), on trouve

$$\|2^{ks} \Delta_{k(1)}(f \cdot g)\|_{L_p(\ell_q)} \leq c \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g \right\|_{L_b} \|2^{ks} \widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\|_{L_{p_1}(\ell_q)}.$$

Choisissons  $a_1 > \frac{n}{b}$  et  $a_2 > \frac{n}{\min(p_1, q)}$  d'après le lemme (3.1.1) et la remarque (3.1.1) on a

$$\left\| 2^{ks} \Delta_{k(1)} (f \cdot g) \right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c \|g\|_{F_{b,2}^0} \|f\|_{F_{p_1,q}^s}. \quad (3.2.5)$$

Nous avons aussi  $\frac{1}{b} = \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n} \implies r - \frac{n}{p_2} = 0 - \frac{n}{b}$  et  $q_2 \leq \frac{n}{\frac{n}{p_2} - r} = b$ , alors d'après le lemme (1.2.1)/(2), on a

$$B_{p_2, q_2}^r \hookrightarrow F_{b,2}^0 \quad \text{i.e.} \quad \|g\|_{F_{b,2}^0} \leq \|g\|_{B_{p_2, q_2}^r}.$$

Alors la relation (3.2.5) devient

$$\left\| 2^{ks} \Delta_{k(1)} (f \cdot g) \right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c \|g\|_{B_{p_2, q_2}^r} \|f\|_{F_{p_1,q}^s}.$$

(ii) **Estimation de  $\Delta_{k(2)} (f \cdot g)$**

Soient  $\sigma, \beta, u$  et  $v$  telle que

$$\max \left( 0, \frac{1}{p_1} - \frac{r}{n} \right) < \frac{1}{u} < \min \left( \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_1} - \frac{s}{n} \right), \quad (3.2.6)$$

et

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}, \quad \sigma = s - \frac{n}{p} + \frac{n}{v}, \quad \beta = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u}. \quad (3.2.7)$$

D'après le lemme (1.4.4) on a

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_{k(2)} (f \cdot g) \right\|_v &= \left\| \Delta_k \left( Q_{k+1} f \cdot \tilde{\Delta}_k g \right) \right\|_v, \\ &\leq c \left\| Q_{k+1} f \cdot \tilde{\Delta}_k g \right\|_v, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder,  $\left( \frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u} \right)$ , alors

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_{k(2)} (f \cdot g) \right\|_v &\leq c \left\| \tilde{\Delta}_k g \right\|_{p_2} \|Q_{k+1} f\|_u, \\ &= c \left\| \tilde{\Delta}_k g \right\|_{p_2} \left\| \sum_{j=0}^{k+1} \Delta_j f \right\|_u, \\ &\leq c \left\| \tilde{\Delta}_k g \right\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1} \|\Delta_j f\|_u. \end{aligned}$$

Donc

$$2^{k\sigma} \left\| \Delta_{k(2)} (f \cdot g) \right\|_v \leq c 2^{k\sigma} \left\| \tilde{\Delta}_k g \right\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1} \|\Delta_j f\|_u. \quad (3.2.8)$$

ce qui implique :

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (2^{k\sigma} \|\Delta_{k(2)}(f \cdot g)\|_v)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( 2^{k\sigma} \|\tilde{\Delta}_k g\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1} \|\Delta_j f\|_u \right)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$\begin{aligned} \|2^{k\sigma} \Delta_{k(2)}(f \cdot g)\|_{\ell_p(L_v)} &\leq c \left\| 2^{k\sigma} \|\tilde{\Delta}_k g\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1} \|\Delta_j f\|_u \right\|_{\ell_p}, \\ &\leq c \left\| 2^{kr} \|\tilde{\Delta}_k g\|_{p_2} \left( 2^{k\beta} \sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta} (2^{j\beta} \|\Delta_j f\|_u) \right) \right\|_{\ell_p}. \end{aligned}$$

D'après le lemme (1.4.3) (puis que  $s < \frac{n}{p_1} \implies \beta < 0$ ) on a

$$\|2^{k\sigma} \Delta_{k(2)}(f \cdot g)\|_{\ell_p(L_v)} \leq c \left\| \left( 2^{kr} \|\tilde{\Delta}_k g\|_{p_2} \right) (2^{j\beta} \|\Delta_j f\|_u) \right\|_{\ell_p}. \quad (3.2.9)$$

On pose  $\frac{1}{\tilde{q}_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$ , après leur application dans la relation (3.2.9), nous trouvons

$$\begin{aligned} \|2^{k\sigma} \Delta_{k(2)}(f \cdot g)\|_{\ell_p(L_v)} &\leq c \left\| 2^{kr} \|\tilde{\Delta}_k g\|_{p_2} \right\|_{\ell_{\tilde{q}_2}} \|2^{j\beta} \|\Delta_j f\|_u\|_{\ell_{p_1}}, \\ &= c \|g\|_{B_{p_2, \tilde{q}_2}^r} \|f\|_{B_{u, p_1}^\beta}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Alors nous avons aussi  $\beta = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u} \implies s - \frac{n}{p_1} = \beta - \frac{n}{u}$ , alors d'après le lemme (1.2.1) on a

$$F_{p_1, q}^s \hookrightarrow B_{u, p_1}^\beta, \quad (3.2.11)$$

avec  $\frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n} \implies \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{\tilde{q}_2} \implies \tilde{q}_2 \leq q_2$ , alors d'après la proposition (1.2.4), on a

$$B_{p_2, q_2}^r \hookrightarrow B_{p_2, \tilde{q}_2}^r, \quad (3.2.12)$$

et puis que

$$\sigma > s \text{ et } v < p_1 \implies \ell_{p_1}^\sigma(L_v) \hookrightarrow L_{p_1}(\ell_q^s). \quad (3.2.13)$$

Alors la relation (3.2.10) devient

$$\|2^{k\sigma} \Delta_{k(2)}(f \cdot g)\|_{L_p(\ell_p)} \leq c \|g\|_{B_{p_2, q_2}^r} \|f\|_{F_{p_1, q}^s}.$$

(iii) **Estimation de  $\Delta_{k(3)}(f \cdot g)$**

• **Etudier le cas  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$**

Soient  $\sigma, \beta, u$  et  $v$  telle que

$$\max\left(0, \frac{1}{p_1} - \frac{r}{n}, \frac{1}{p_1} - \frac{r+s}{n}\right) < \frac{1}{u} < \frac{1}{p_1}. \quad (3.2.14)$$

et la relation (3.2.7), comme  $\rho = \max\left(0, \frac{n}{v} - n\right) = 0$ , puis que

$$\frac{n}{v} - n = \left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u}\right) - n < \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1} - n \leq 0,$$

alors d'après le lemme (1.4.4) on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_v &= \left\| \sum_{j=k}^{\infty} \Delta_k(\Delta_j f \cdot \bar{\Delta}_j g) \right\|_v, \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty} \|\Delta_k(\Delta_j f \cdot \bar{\Delta}_j g)\|_v, \\ &\leq c \sum_{j=k}^{\infty} \|\Delta_j f \cdot \bar{\Delta}_j g\|_v, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder,  $\left(\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}\right)$ , alors

$$\|\Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_v \leq c \sum_{j=k}^{\infty} \|\bar{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u.$$

Donc

$$2^{k\sigma} \|\Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_v \leq c 2^{k\sigma} \sum_{j=k}^{\infty} \|\bar{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u,$$

ce qui implique

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (2^{k\sigma} \|\Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_v)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( 2^{k\sigma} \sum_{j=k}^{\infty} \|\bar{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u \right)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$\begin{aligned} \|2^{k\sigma} \Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_{\ell_p(L_v)} &\leq \left\| 2^{k\sigma} \sum_{j=k}^{\infty} \|\bar{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u \right\|_{\ell_p}, \\ &\leq c \left\| 2^{k(\beta+r)} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j(\beta+r)} 2^{j(\beta+r)} \|\bar{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u \right\|_{\ell_p}. \end{aligned}$$

D'après le lemme (1.4.3) ( $(\beta + r) > 0$ ) on a

$$\left\| 2^{k\sigma} \Delta_{k(3)} (f \cdot g) \right\|_{\ell_p(L_v)} \leq c \left\| 2^{j(\beta+r)} \left\| \overline{\Delta}_j g \right\|_{p_2} \left\| \Delta_j f \right\|_u \right\|_{\ell_p}. \quad (3.2.15)$$

On pose  $\frac{1}{\tilde{q}_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$ , la relation (3.2.15) devient la suivante

$$\begin{aligned} \left\| 2^{k\sigma} \Delta_{k(3)} (f \cdot g) \right\|_{\ell_p(L_v)} &\leq c \left\| 2^{jr} \left\| \overline{\Delta}_j g \right\|_{p_2} \right\|_{\ell_{\tilde{q}_2}} \left\| 2^{j\beta} \left\| \Delta_j f \right\|_u \right\|_{\ell_{p_1}}. \\ &= \|g\|_{B_{p_2, \tilde{q}_2}^r} \|f\|_{B_{u, p_1}^\beta}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Nous avons aussi les relation (3.2.11), (3.2.12) et (3.2.13). Donc la relation (3.2.16), devient

$$\left\| 2^{k\sigma} \Delta_{k(3)} (f \cdot g) \right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c \|g\|_{B_{p_2, q_2}^r} \|f\|_{F_{p_1, q}^s}.$$

• **Etudier le cas**  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$

Soient  $\sigma, u$  et  $v$  telle que

$$\max \left( 0, 1 - \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1} - \frac{r}{n} \right) < \frac{1}{u} < \frac{1}{p_1}. \quad (3.2.17)$$

et

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}, \quad \sigma = s - \frac{n}{p} + \frac{n}{v}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_{k(3)} (f \cdot g) \right\|_v &= \left\| \sum_{j=k}^{\infty} \Delta_k (\Delta_j f \cdot \overline{\Delta}_j g) \right\|_v, \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty} \left\| \Delta_k (\overline{\Delta}_j g \cdot \Delta_j f) \right\|_v. \end{aligned}$$

D'après le lemme (1.4.4) on a

$$\left\| \Delta_{k(3)} (f \cdot g) \right\|_v \leq c \sum_{j=k}^{\infty} 2^{(j-k)\rho} \left\| \overline{\Delta}_j g \cdot \Delta_j f \right\|_v,$$

avec  $\rho = \frac{n}{v} - n = \frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n$ , donc

$$2^{k\sigma} \left\| \Delta_{k(3)} (f \cdot g) \right\|_v \leq c 2^{k\sigma} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{(j-k)\left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n\right)} \left\| \overline{\Delta}_j g \cdot \Delta_j f \right\|_v.$$

D'après l'inégalité de Hölder,  $\left(\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}\right)$ , on a

$$\begin{aligned}
 2^{k\sigma} \|\Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_v &\leq c 2^{k\sigma} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{(j-k)\left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n\right)} \|\overline{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u, \\
 &\leq c 2^{k\left(s - \frac{n}{p} + \frac{n}{v}\right)} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j\left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n\right) - k\left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n\right)} \|\overline{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u, \\
 &\leq c 2^{k\left(s - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} - r\right) + \left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u}\right)\right)} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j\left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n\right) - k\left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n\right)} \|\overline{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u, \\
 &\leq c 2^{k\left(s - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + r + n\right)} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j\left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n\right)} 2^{j\left(s - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + r\right)} 2^{-j\left(s - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + r\right)} \|\overline{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u, \\
 &\leq c 2^{k\mu} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\mu} \cdot 2^{j(r+\varrho)} \|\overline{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u.
 \end{aligned}$$

où  $\varrho = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u}$  et  $\mu = s + r - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + n > 0$ , ce qui implique

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (2^{k\sigma} \|\Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_v)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( 2^{k\mu} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\mu} \cdot 2^{j(r+\varrho)} \|\overline{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après le lemme (1.4.3) ( $\mu > 0$ ) on a

$$\|2^{k\sigma} \Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_{\ell_p(L_v)} \leq c \left\| 2^{j(r+\varrho)} \|\overline{\Delta}_j g\|_{p_2} \|\Delta_j f\|_u \right\|_{\ell_p}. \quad (3.2.18)$$

On pose  $\frac{1}{\tilde{q}_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$ , par l'application dans la relation (3.2.18), on trouve

$$\begin{aligned}
 \|2^{k\sigma} \Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_{\ell_p(L_v)} &\leq c \left\| 2^{jr} \|\overline{\Delta}_j g\|_{p_2} \right\|_{\ell_2} \|2^{j\varrho} \|\Delta_j f\|_u\|_{\ell_{p_1}}, \\
 &= c \|g\|_{B_{p_2, \tilde{q}_2}^r} \|f\|_{B_{u, p_1}^\varrho}. \quad (3.2.19)
 \end{aligned}$$

Nous avons aussi  $\varrho = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u} \implies s - \frac{n}{p_1} = \varrho - \frac{n}{u}$ , alors d'après le lemme (1.2.1) on a

$$F_{p_1, q}^s \hookrightarrow B_{u, p_1}^\varrho,$$

puisque  $\sigma > s$  et  $v < p$ , alors on a

$$\ell_p^\sigma(L^v) \hookrightarrow L^p(\ell_q^s).$$

Donc la relation (3.2.19) devient

$$\|2^{ks} \Delta_{k(3)}(f \cdot g)\|_{L^p(\ell_q)} \leq c \|g\|_{B_{p_2, q_2}^r} \|f\|_{F_{p_1, q}^s}.$$

■

# Conclusion

L'objectif de ce travail est d'étudier la multiplication ponctuelle dans les espaces de Besov et dans les espaces de Triebel-Lizorkin, on a présenter les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres  $(s, s_0, s_1)$ ,  $(p, p_0, p_1)$ ,  $(q, q_0, q_1)$  pour que les trois inclusions

$$F \cdot F \hookrightarrow F \quad , \quad B \cdot B \hookrightarrow B \quad \text{et} \quad F_{p_1, q}^s \cdot B_{p_2, q_2}^r \hookrightarrow F_{p, q}^s.$$

soit vérifiées.

# Bibliographie

- [1] E. AZOULAY et J. AVIGNANT, Mathematiques 3. Analyse, McGRAW-Hill,1984.
- [2] J. Bergh et J. Löfstrom. Interpolation spaces. Springer-verlag,1976.
- [3] A. Djeriou. Thèse de doctorat en sciences Université Batna,2012.
- [4] D. Drihem. La multiplication dans les espaces de Besov,Lizorkin-Triebel et Lorentz, le cas critique  $s < (n/p)$ . Thèse . M'sila 2001.
- [5] D. Drihem et M. Moussai. Some embeddings into the multiplier spaces associated to Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 21 (2002),no. 1, 179-184.
- [6] D. Drihem et M. Moussai. Pointwise multiplication in Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Int. J. M. M. S.. Vol.21 (2006), Article ID 76182,1-18.
- [7] J. Franke. On the spaces of Triebel-Lizorkin type: Pointwise multipliers and spaces on domains. Math. Nachr, 125 (1986), 29-68.
- [8] T. Runst et W. Sickel. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskii operators and nonlinear partial differential equations. de Gruyter, Berlin 1996.
- [9] E. M. Stein. singular integrals and differentiability properties of function. princeton University Press. 1970.
- [10] E. M. Stein. Harmonic Analysis, real-variable methodes, orthogonality and oscillatory integrals. Press, Priceeton New Jersey, 1993.



- [11] H. Triebel. Theory of function spaces. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [12] H. Triebel. Theory of function spaces II. Birkhäuser, Basel, 1992.